جامعة البعث
كلية العلوم



قسم الرياضيات
السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

تحليل (٣)

المحاضرة النظرية الثانية

(٢)

إعداد :

داني محفوض – وهب الحسن

Facebook: Dani Mahfoud
Facebook: Wahab Al-Hasan

تمهيد: في المحاضرة الأولى قمنا بدراسة عامة للمتتاليات والآن، في المحاضرة الثانية، سنبدأ بدراسة مفهوم السلسلة العددية، ومفهوم تقارب السلسلة واختبارات التقارب ---

أولاً: مفهوم السلسلة العددية:

السلسلة العددية هي المجموع اللانهائي لحدود متتالية عددية لانهائية، فإذا كانت $\{a_n\}$ متتالية عددية، وكان لها الحدود:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$

فإن المجموع اللانهائي لهذه الحدود:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$

يشكل ما نسميه بالسلسلة العددية اللانهائية ونرمز لها بالرمز: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

* نسمي a_1 الحد الأول من حدود السلسلة، ونسمي a_2 الحد الثاني و a_3 الحد الثالث و --- هكذا إلى أن نصل إلى الحد a_n الذي نسميه الحد النوني، وهو الحد العام للسلسلة، وهو الحد الذي يولد جميع حدود السلسلة.

* نذرس أمثلة عن السلسلة:

مثال (1): السلسلة: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

تسمى هذه السلسلة بالسلسلة التوافقية وحدها العام $a_n = \frac{1}{n}$ وتكتب بالشكل المختصر: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

انتهت المحاضرة الأولى في الصفحة 22

مِثَالْ (2) : السِّلْسِلَةُ : $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

حَدُّهَا العَامْ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

وَتُكْتَبُ بِالشَّكْلِ المُخْتَصَرْ : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

مِثَالْ (3) : السِّلْسِلَةُ : $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + \cdots$

حَيْثُ $a \neq 0$ عَدَدْ حَقِيقِيّ . تُسَمَّى هَذِهِ السِّلْسِلَةُ بِالسِّلْسِلَةِ الهَنْدَسِيَّةِ وَحَدُّهَا العَامْ $u_n = a^{n-1}$

مِثَالْ (4) : السِّلْسِلَةُ : $a + 2a + 3a + \cdots + (n-1)a + \cdots$

تُسَمَّى هَذِهِ السِّلْسِلَةُ بِالسِّلْسِلَةِ الحِسَابِيَّةِ وَ حَدُّهَا العَامْ $u_n = (n-1) \cdot a$

إِذَا كَانَ مَجْمُوعُ السِّلْسِلَةِ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ مُنْتَهِيًا ، فَيُمْكِنْ أَنْ نَجِدْ قِيمَتَهُ الدَّقِيقَةَ وَتُسَمَّى مَجْمُوعَ السِّلْسِلَةِ ، أَمَّا إِذَا كَانَ المَجْمُوعُ لَانِهَائِيًّا ، فَلَا نَقُولُ عَنْهُ شَيْئًا سِوَى المَجْمُوعُ اللَّانِهَائِيّ لِلسِّلْسِلَةِ !

ثَانِيًا : مُتَتَالِيَةُ المَجَامِيعِ الجُزْئِيَّةِ لِلسِّلْسِلَةِ :

لِتَكُنْ لَدَيْنَا المُتَتَالِيَةُ العَدَدِيَّةُ : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

إِذَا بَدَأْنَا بِالتَّتَالِي بِأَخْذِ المَجَامِيعِ الجُزْئِيَّةِ لِحُدُودِهَا :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_4 + a_5$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = S_{n-1} + a_n$

وَ الآنَ : نُسَمِّي المتتالية التي حُدُودُهَا S_1 وَ S_2 وَ S_3 وَ S_4 وَ --- وَ S_n ، بِمُتَتَالِيَة المجاميع الجزئية لِلسِّلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، وَنَرْمُزُ لَهَا بـ $\{S_n\}$.

ثَالِثاً : تَبَاعُدُ وَ تَقَارُبُ السِّلْسِلَة العَدَدِيَّة :

* إِذَا كَانَتْ مُتَتَالِيَة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ لِلسِّلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، مُتَقَارِبَة وَنِهَايَتُهَا S أي : $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ فَإِنَّ العَدَدَ S يُمَثِّلُ مَجْمُوعَ السِّلْسِلَة وَ نَقُولُ فِي هَذِهِ الحَالَة إِنَّ السِّلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَة .

* أَمَّا إِذَا كَانَتْ مُتَتَالِيَة المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ مُتَبَاعِدَة أي لَيْسَ لَهَا نِهَايَة مَحْدُودَة ، فَنَقُولُ أَنَّ السِّلْسِلَة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هِيَ سِلْسِلَة مُتَبَاعِدَة وَلَيْسَ لَهَا مَجْمُوع .

إِنَّ الحَدِيثَ عَنْ مَجْمُوعِ السِّلْسِلَة يَخُصُّ السَّلَاسِلَ المُتَقَارِبَة ، أَمَّا السَّلَاسِلُ المُتَبَاعِدَة فَلَا مَجَالَ لِلْحَدِيثِ عَنْ مَجْمُوعِهَا .

نَدْرُسُ أَمْثِلَةً :

مِثَالٌ (١) : السِّلْسِلَةُ $1+1+1+1+1+\cdots+1+\cdots$

لِنَأْخُذْ مُتَتَالِيَةَ المَجَامِيعِ الجُزْئِيَّةِ لَهَا فَنَحْصُلُ عَلَى :

$S_1 = 1 \qquad S_2 = 2 \qquad S_3 = 3 \quad \cdots \quad S_n = n$

وَ تَكُونُ مُتَتَالِيَةُ المَجَامِيعِ الجُزْئِيَّةِ لَهَا :

$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$

وَهِيَ مُتَتَالِيَةٌ مُتَبَاعِدَةٌ لِأَنَّهَا تَؤُولُ إِلَى اللَّانِهَايَةِ

إِذًا هَذِهِ السِّلْسِلَةُ مُتَبَاعِدَةٌ .

مِثَالٌ (2) : السِّلْسِلَةُ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

مُتَتَالِيَةُ المَجَامِيعِ الجُزْئِيَّةِ :

$S_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad S_3 = \frac{3}{4} \quad , \cdots , S_n = \frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

إِذًا السِّلْسِلَةُ مُتَقَارِبَةٌ وَمَجْمُوعُهَا وَاحِدٌ .

مُبَرْهَنَةٌ : إِذَا كَانَتِ السِّلْسِلَةُ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مُتَقَارِبَةً

فَإِنَّ : $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

وَإِذَا كَانَ $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ فَإِنَّ السِّلْسِلَةَ مُتَبَاعِدَةٌ .

مُلَاحَظَةٌ (١) : إِذَا كَانَ : $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

وَكَانَ : $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$

فإنّ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$$

$S_n \to S$ ، $S_{n-1} \to S_1$

ملاحظة (2) : إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين متقاربتين فإنّ:

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ سلسلة متقاربة أيضاً.

ملاحظة (3) : إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ إحداهما سلسلة متقاربة و الأخرى متباعدة فإنّ:

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ سلسلة متباعدة.

ملاحظة (4) : إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلتين متباعدتين فإنّ:

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ هي سلسلة لا يمكن الحكم عليها مباشرة.

ملاحظة (5) : إذا حذفنا من السّلسلة عدد منتهٍ من الحدود فإنّ ذلك يؤثّر على مجموع السّلسلة و لكن لا يؤثّر على تقاربها.

السّلسلة الحسابيّة : هي مجموع حدود المتتالية الحسابيّة :

$$a + (a+r) + (a+2r) + \dots + (a+(n-1)r) + \dots$$

و هي سلسلة متباعدة دائماً.

السلاسل الهندسية: هي كل سلسلة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^{n}$$

حدها الأول هو a و أساسها هو r .

* الحد العام للسلسلة الهندسية: $S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$

* إذا كان $|r|<1$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

و في هذه الحالة تكون السلسلة الهندسية متقاربة و مجموعها $\frac{a}{1-r}$.

* أما إذا كان $|r|\geq 1$ فالسلسلة الهندسية متباعدة لأن حدها العام لا يسعى إلى الصفر.

ملاحظة ، إذا كان الحد العام للسلسلة الهندسية يسعى للصفر فممكن أن تكون متقاربة و ممكن أن تكون متباعدة ، أما إذا يسعى لغير الصفر فهي حكماً متباعدة.

كان

مثال : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ هذه سلسلة متباعدة لأن:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow a_n = \left[\frac{n}{n(1+n^{-1})}\right]^{n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow$$ متباعدة

تمرين: ادرس تقارب السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
و أوجد مجموعها.

الحل: نلجأ إلى تفريق الكسر:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

بتوحيد المقامات و حذف المقام المشترك نكون:

$$1 = n(A+B) + A$$

و بمقارنة الأمثال بين الطرفين نكون:

$$\boxed{A=1} \quad \text{و} \quad A+B=0 \Leftarrow \boxed{B=-1}$$

إذاً:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$* \quad a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$*$ $S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $*$ $S_2 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$

$*$ $S_3 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

إذاً السلسلة متقاربة و مجموعها 1 .

انتهت المحاضرة الثانية

writen by: Dani Mahfoud , wahab Al Hasan